

# Transformation linéaires



GIF-4105/7105 Photographie Algorithmique, Hiver 2016  
Jean-François Lalonde

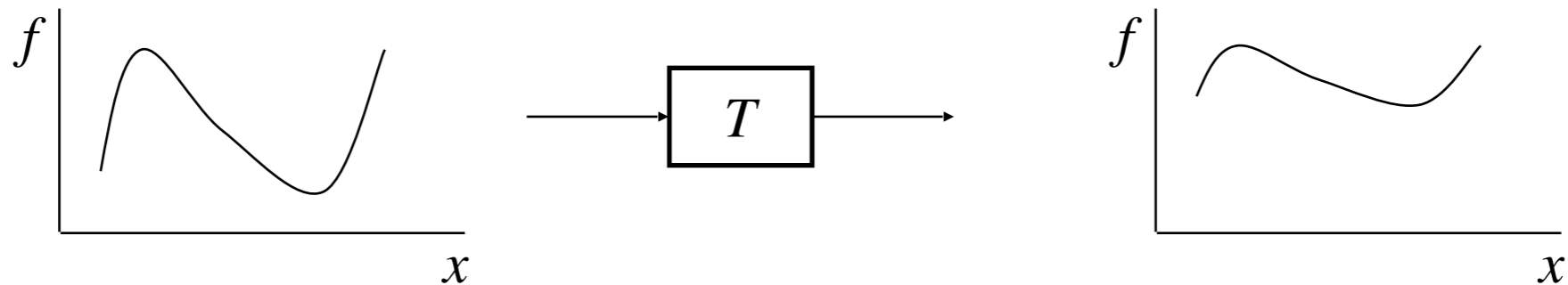
# Cette semaine

- Aujourd'hui:
  - Transformations linéaires globales
  - Calculer la transformation à partir d'images
  - Appliquer une transformation à une image
  - Morphage

# Transformations d'image

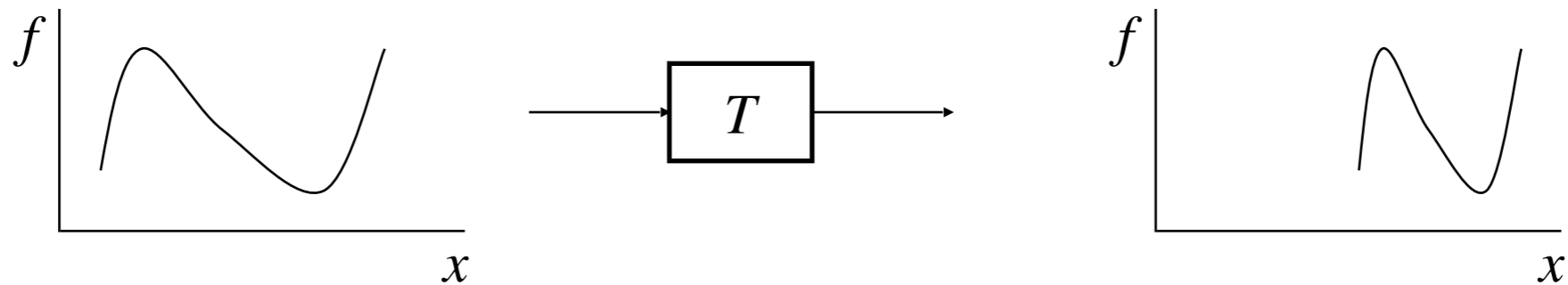
- filtrage: modifier l'image du signal

$$g(x) = T(f(x))$$



- transformations: modifier le domaine du signal

$$g(x) = f(T(x))$$

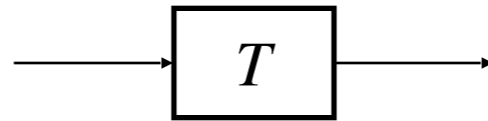




# Transformations d'image

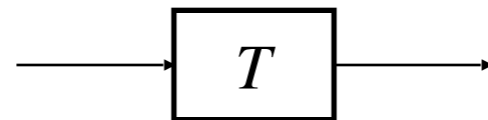
- filtrage: modifier l'image du signal

$$g(x) = T(f(x))$$



- transformations: modifier le domaine du signal

$$g(x) = f(T(x))$$

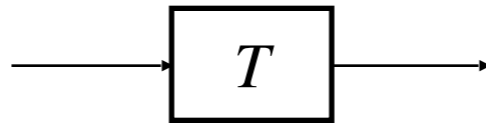


# Transformations globales (paramétriques)

- Transformation  $T$  modifie les coordonnées:



$$\mathbf{p} = (x, y)$$



$$\mathbf{p}' = (x', y')$$

$$\mathbf{p}' = T(\mathbf{p})$$

- Qu'est-ce que "globale" veut dire?
  - La même chose pour chaque point
  - Peut être représentée par un faible nombre de paramètres (paramétrique)
- Pour les transformations linéaires, on peut représenter la transformation par une matrice:

$$\mathbf{p}' = \mathbf{M}\mathbf{p} \quad \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \mathbf{M} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

# Transformations globales (paramétriques)

- Exemples:



translation



rotation



aspect



affine



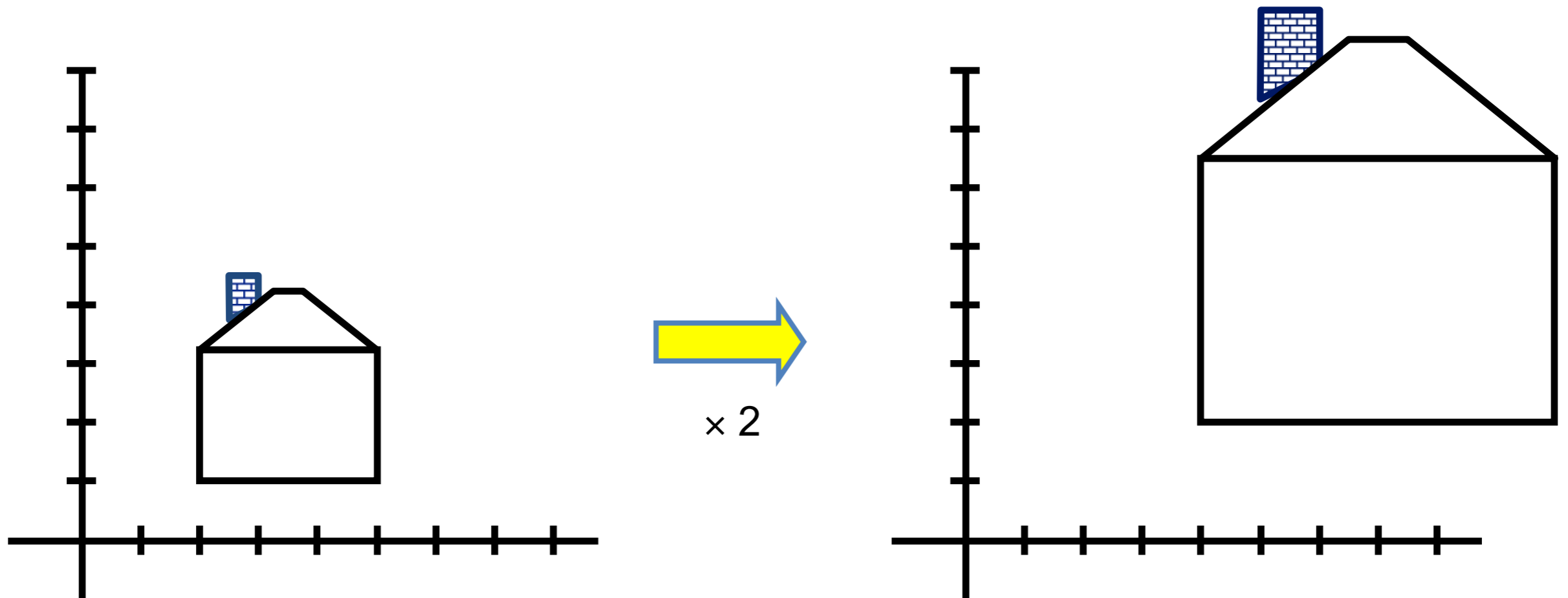
perspective



cylindrique

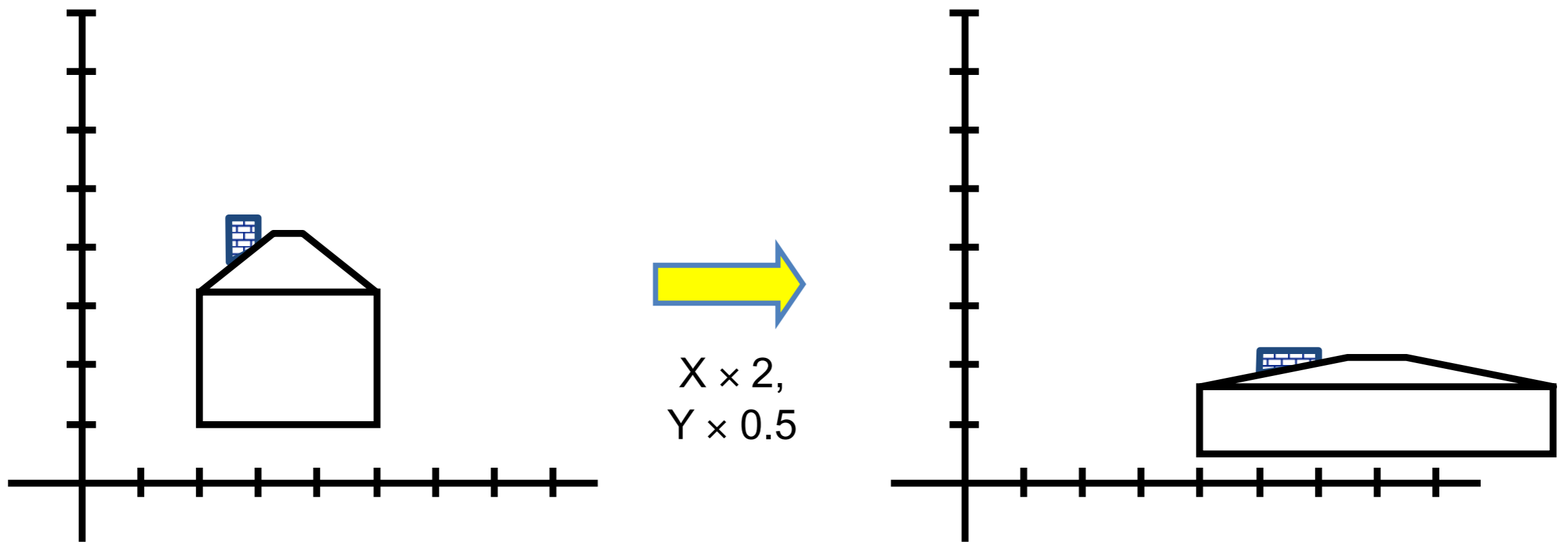
# Mise à l'échelle

- Multiplier chaque coordonnée par un scalaire
- Uniforme: le même scalaire pour chaque coordonnées (ici: x et y)



# Mise à l'échelle

- Non-uniforme: différent scalaire par coordonnée



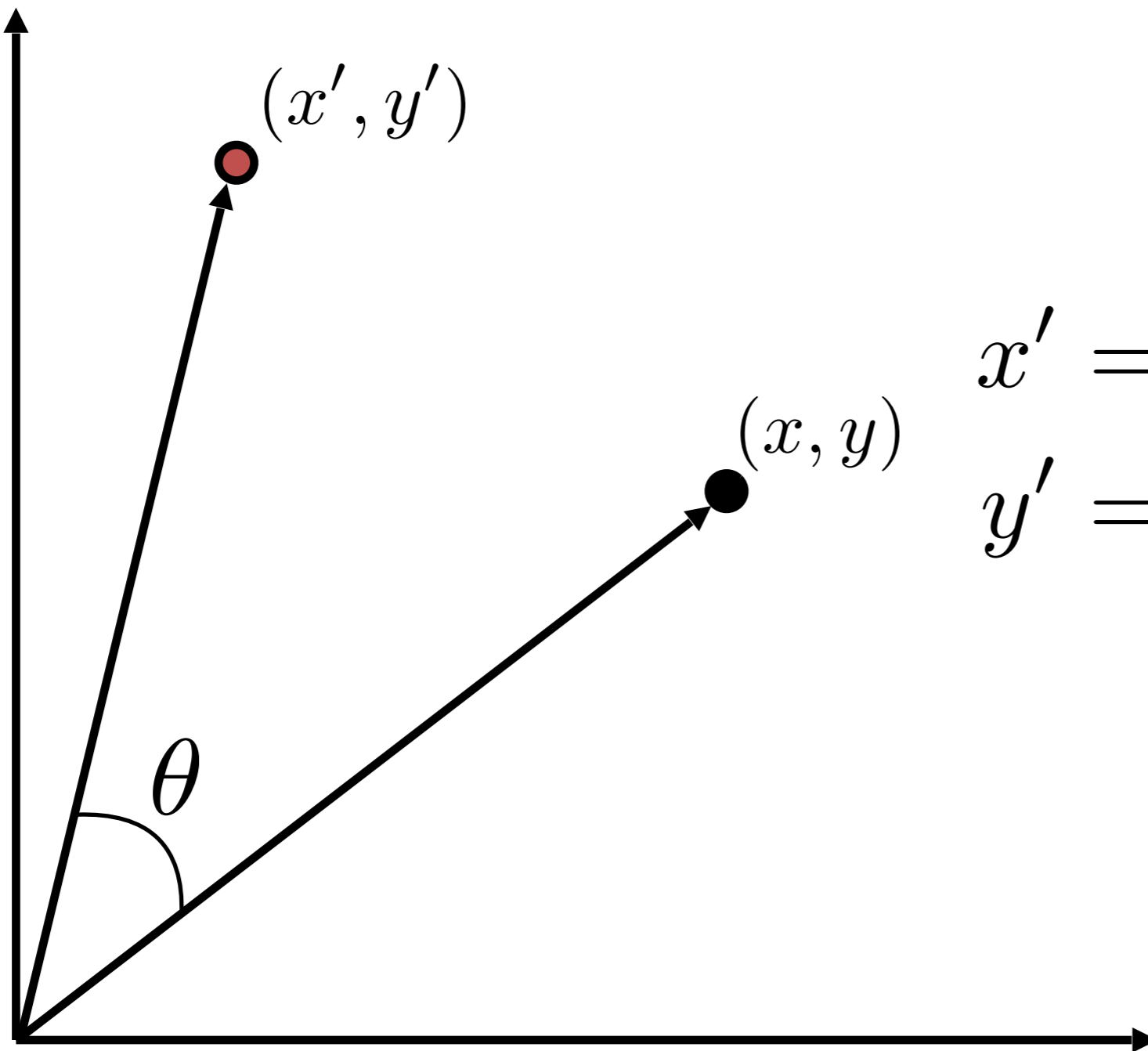


# Mise à l'échelle

- Opération:  $x' = ax$   
 $y' = ay$

- Matrice: 
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}}_{\text{matrice } \mathbf{S}} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

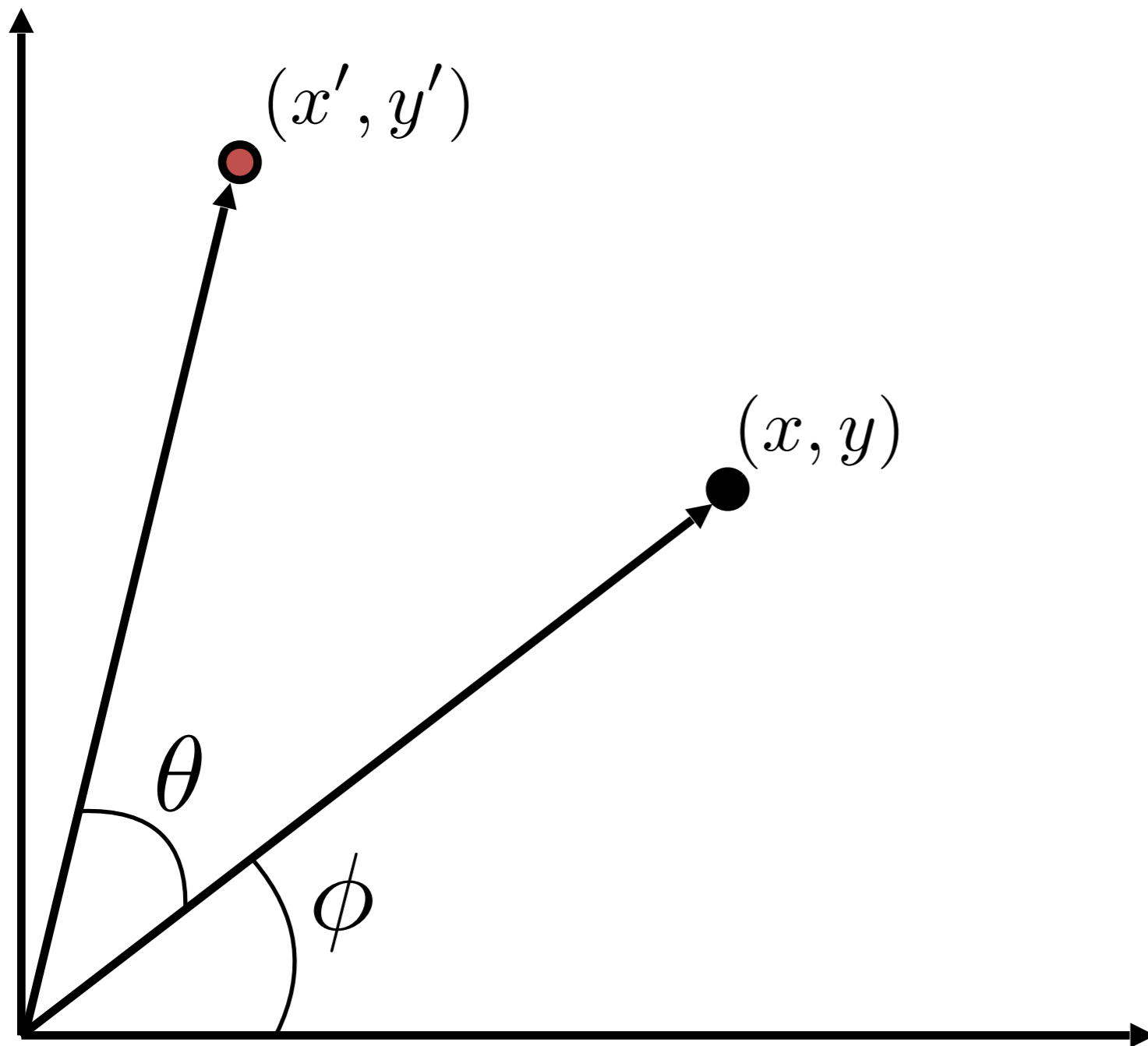
# Rotation 2D



$$x' = x \cos \theta - y \sin \theta$$

$$y' = x \sin \theta + y \cos \theta$$

# Rotation 2D



## Coordonnées polaires

$$x = r \cos(\phi)$$

$$y = r \sin(\phi)$$

$$x' = r \cos(\phi + \theta)$$

$$y' = r \sin(\phi + \theta)$$

## Identité trigonométrique

$$x' = r \cos(\phi) \cos(\theta) - r \sin(\phi) \sin(\theta)$$

$$y' = r \sin(\phi) \cos(\theta) + r \cos(\phi) \sin(\theta)$$

## Substitution

$$x' = x \cos(\theta) - y \sin(\theta)$$

$$y' = x \sin(\theta) + y \cos(\theta)$$

# Rotation 2D

- Forme matricielle:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}}_{\mathbf{R}} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

- Même si  $\sin(\theta)$  et  $\cos(\theta)$  sont des fonctions non-linéaires en  $\theta$ ,
  - $x'$  et  $y'$  sont des combinaisons linéaires de  $x$  et  $y$
- Quelle est la transformation inverse?
  - Rotation par  $-\theta$
  - Pour les matrices de rotation:

$$\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^T$$

# Matrices 2x2

- Quelles transformations peuvent être représentées par des matrices 2x2?

Identité?

$$\begin{aligned} x' &= x \\ y' &= y \end{aligned} \quad \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Facteur d'échelle autour de (0,0)?

$$\begin{aligned} x' &= s_x x \\ y' &= s_y y \end{aligned} \quad \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x & 0 \\ 0 & s_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$



# Matrices 2x2

- Quelles transformations peuvent être représentées par des matrices 2x2?

Réflexion en x?

$$\begin{aligned} x' &= -x \\ y' &= y \end{aligned} \quad \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Réflexion par rapport à l'origine?

$$\begin{aligned} x' &= -x \\ y' &= -y \end{aligned} \quad \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

# Matrices 2x2

- Quelles transformations peuvent être représentées par des matrices 2x2?

Rotation?

$$\begin{aligned}x' &= x \cos \theta - y \sin \theta \\y' &= x \sin \theta + y \cos \theta\end{aligned} \quad \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Étirement (shear)?

$$\begin{aligned}x' &= x + k_x y \\y' &= y + k_y x\end{aligned} \quad \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & k_x \\ k_y & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

# Matrices 2x2

- Quelles transformations peuvent être représentées par des matrices 2x2?

Translation?

$$x' = x + t_x$$

$$y' = y + t_y$$

NON!

Seulement les fonctions linéaires en  $x$  et  $y$  peuvent être représentées par des matrices 2x2

# Transformations linéaires

- Toutes les transformations linéaires sont des combinaisons de:

- échelle, rotation, étirement, réflexion 
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

- Propriétés

- Origine ne change pas

- Sont préservés: 
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i & j \\ k & l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

- Lignes, lignes parallèles, ratios

- Composition est aussi une transformation linéaire

# Translations?

- Comment pouvons-nous représenter les translations sous forme matricielle?

$$\begin{aligned}x' &= x + t_x \\y' &= y + t_y\end{aligned}$$



# Coordonnées homogènes

- Représente des coordonnées 2-D avec un vecteur à 3 éléments

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{Coordonnées homogènes}} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ w \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{Point 2D}} \begin{bmatrix} x/w \\ y/w \end{bmatrix}$$

# Coordonnées homogènes

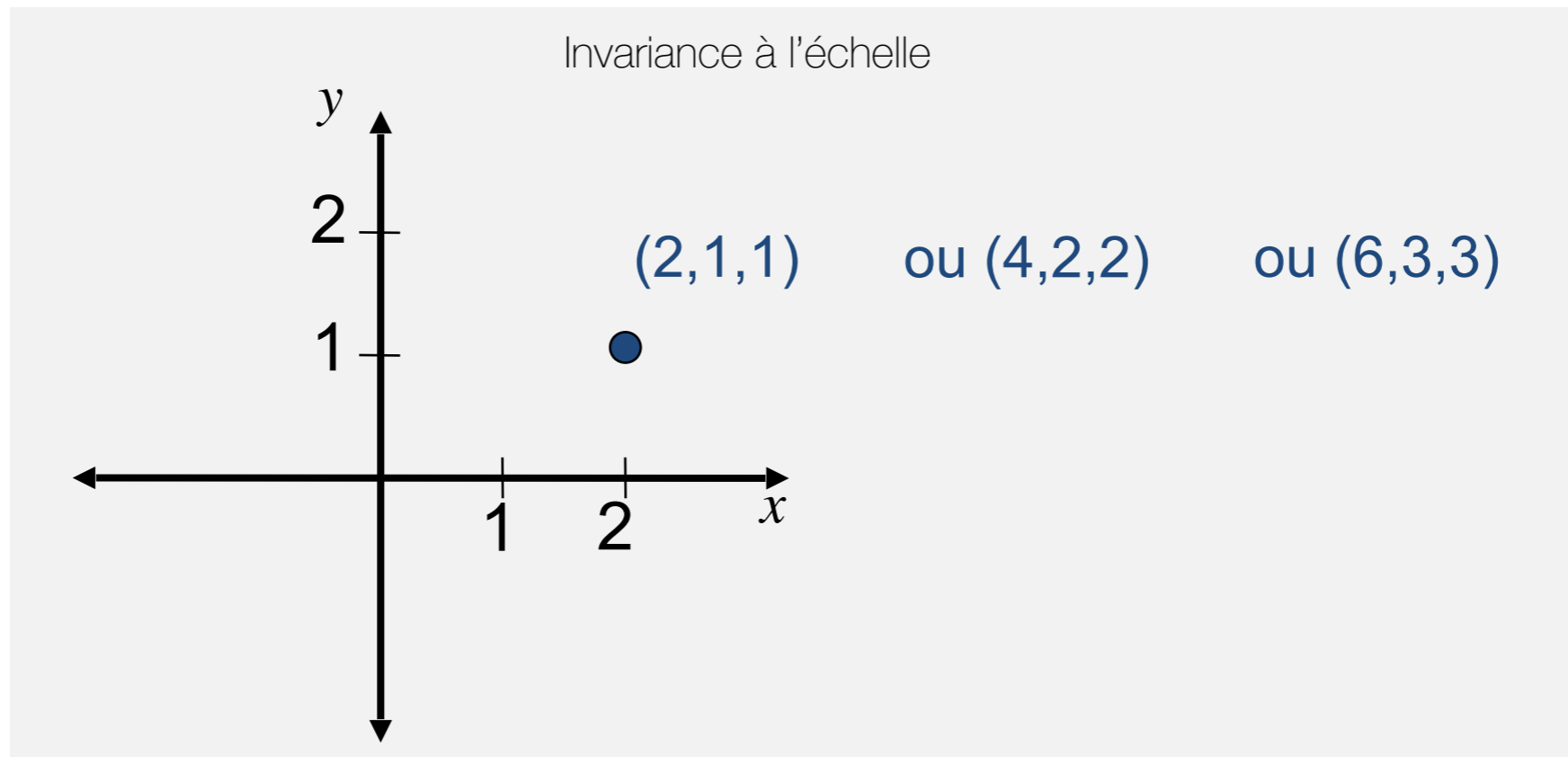
- Propriétés:

- Invariance au facteur d'échelle

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ w \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} x \\ y \\ w \end{bmatrix}$$

- $(x, y, 0)$  représente un point à l'infini

- $(0, 0, 0)$  n'est pas permis



# Translations?

- Comment pouvons-nous représenter les translations sous forme matricielle?

$$x' = x + t_x$$

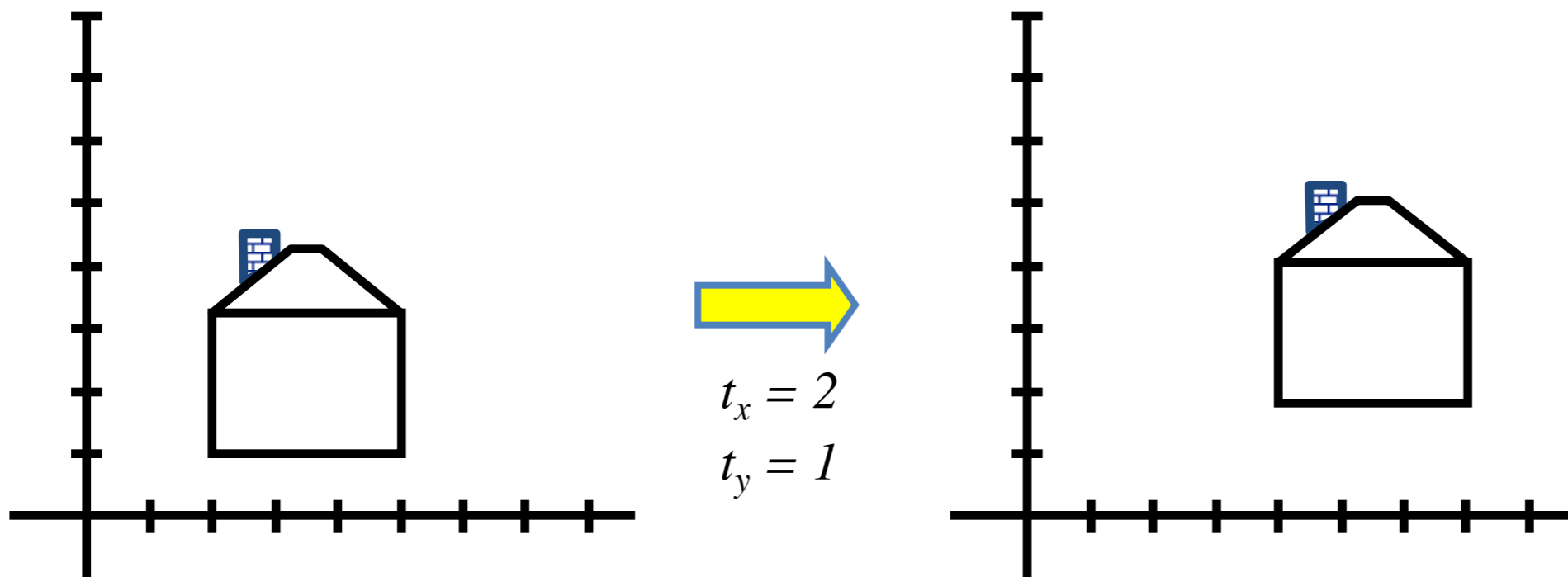
$$y' = y + t_y$$

- En utilisant une troisième colonne!

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

# Exemple de translation

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$



# Transformations 2D en matrices 3x3

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

Translation

Échelle

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & k_x & 0 \\ k_y & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

Rotation

Étirement



# Composition

- Les transformations peuvent être composées en multipliant les matrices

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ w' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & x_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ w \end{bmatrix}$$

# Démonstration

transformations.m

# Transformations affines

- Transformées affines sont des combinaisons de:

- Transformées linéaires; et

- Translations

- Propriétés

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

- L'origine n'est pas nécessairement préservée
- Sont préservées: les lignes, lignes parallèles, ratios
- Composition est aussi une transformée affine

# Transformations projectives

- Transformées affines sont des combinaisons de:

- Transformées affines; et

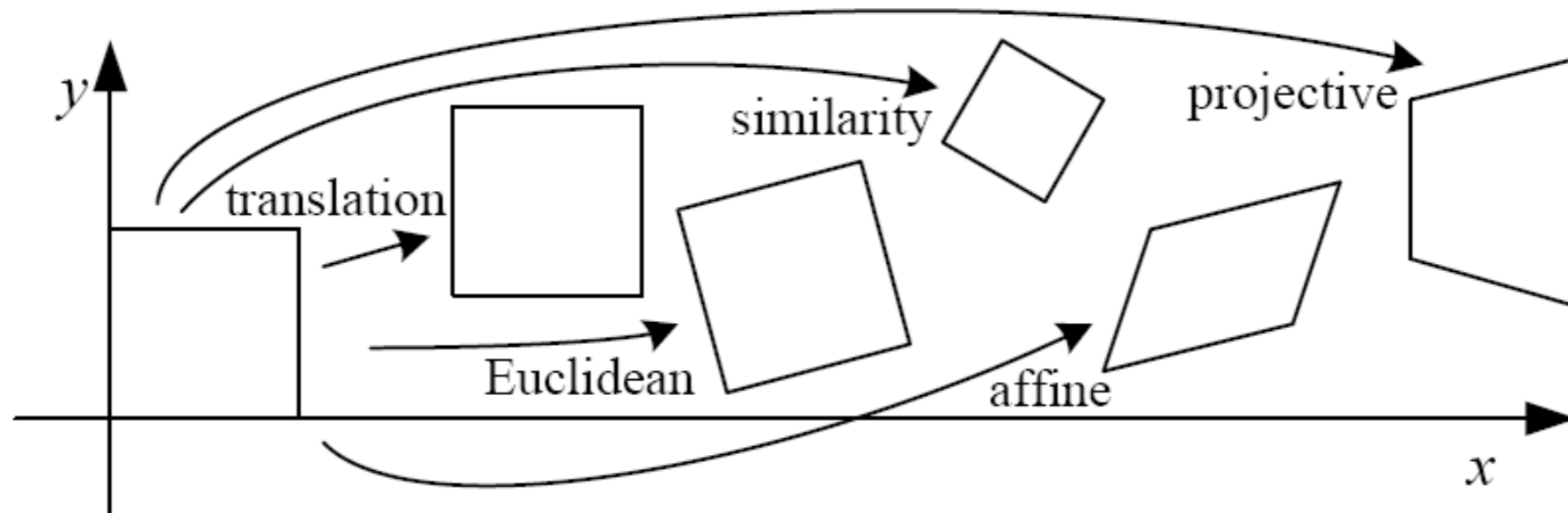
- Projections


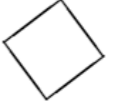



- Propriétés

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

- L'origine n'est pas nécessairement préservée
- Sont préservées: les lignes, ~~lignes parallèles, ratios~~
- Composition est aussi une transformée affine
- Définies jusqu'à un facteur d'échelle (8 DDL)

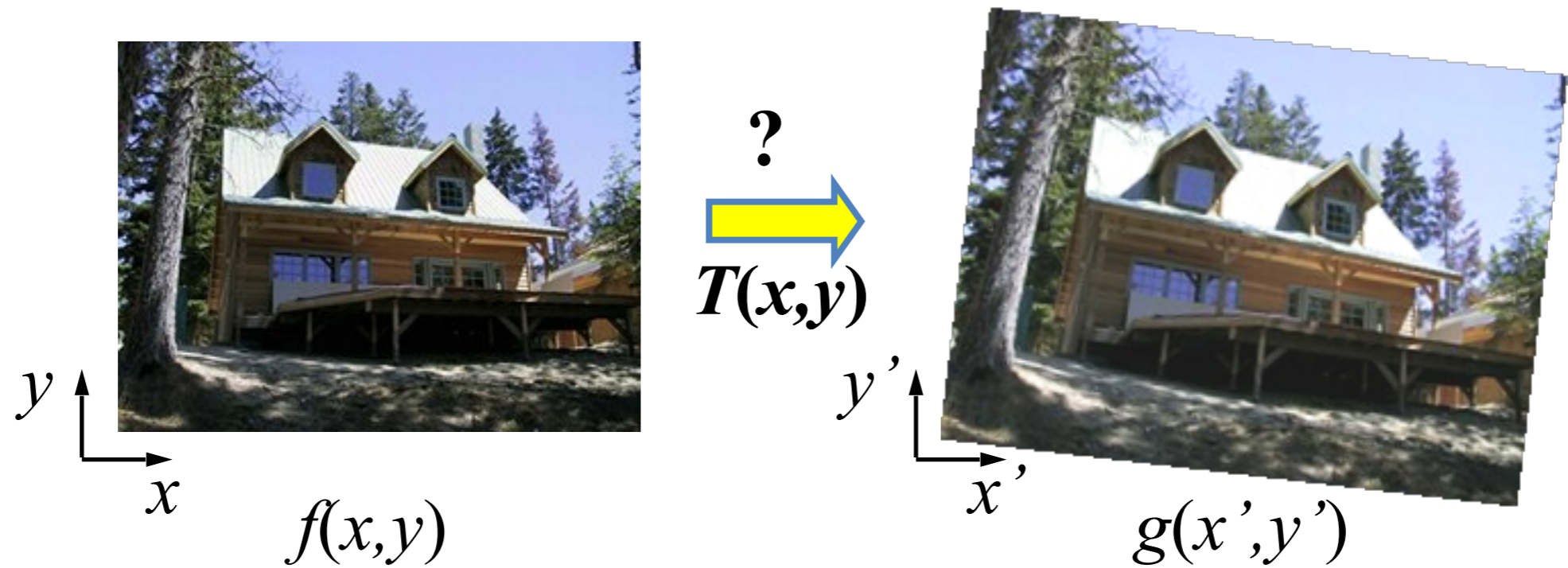
# Transformations en 2D



Name	Matrix	# D.O.F.	Preserves:	Icon
translation	$\begin{bmatrix} \mathbf{I} &   & \mathbf{t} \end{bmatrix}_{2 \times 3}$			
rigid (Euclidean)	$\begin{bmatrix} \mathbf{R} &   & \mathbf{t} \end{bmatrix}_{2 \times 3}$			
similarity	$\begin{bmatrix} s\mathbf{R} &   & \mathbf{t} \end{bmatrix}_{2 \times 3}$			
affine	$\begin{bmatrix} \mathbf{A} \end{bmatrix}_{2 \times 3}$			
projective	$\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{H}} \end{bmatrix}_{3 \times 3}$			

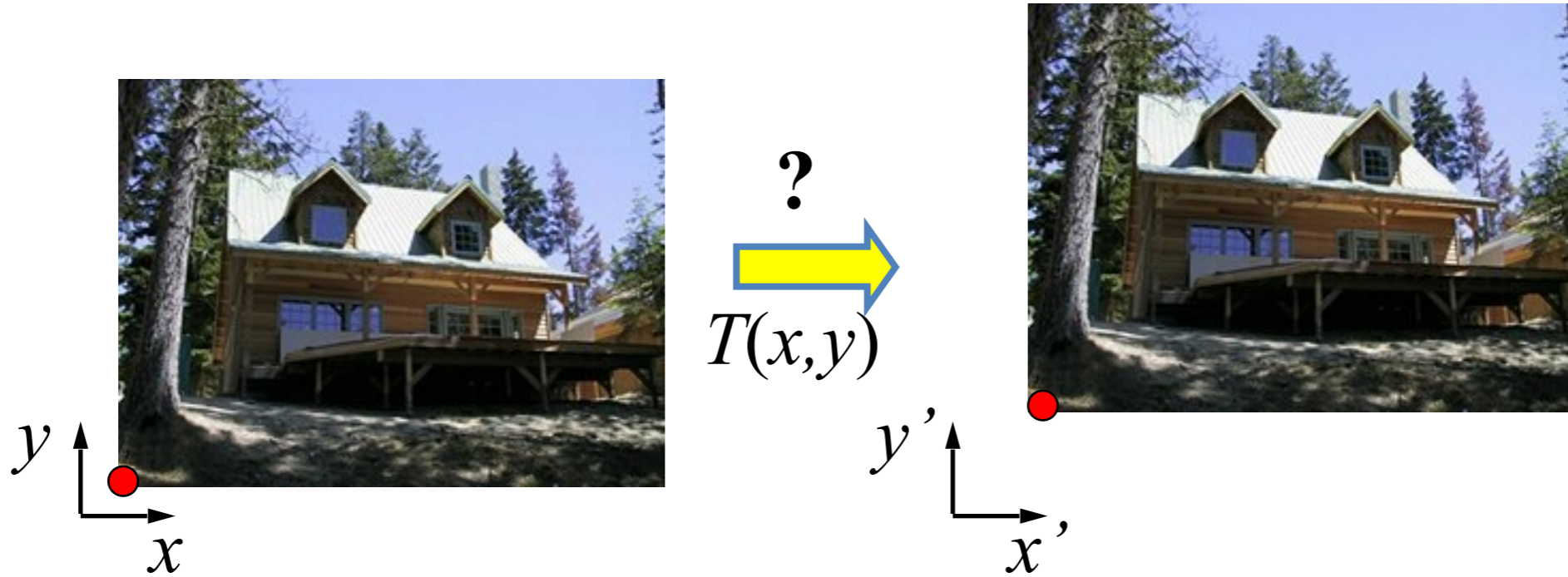
Composition et inverse font aussi parties du groupe

# Estimer les transformations



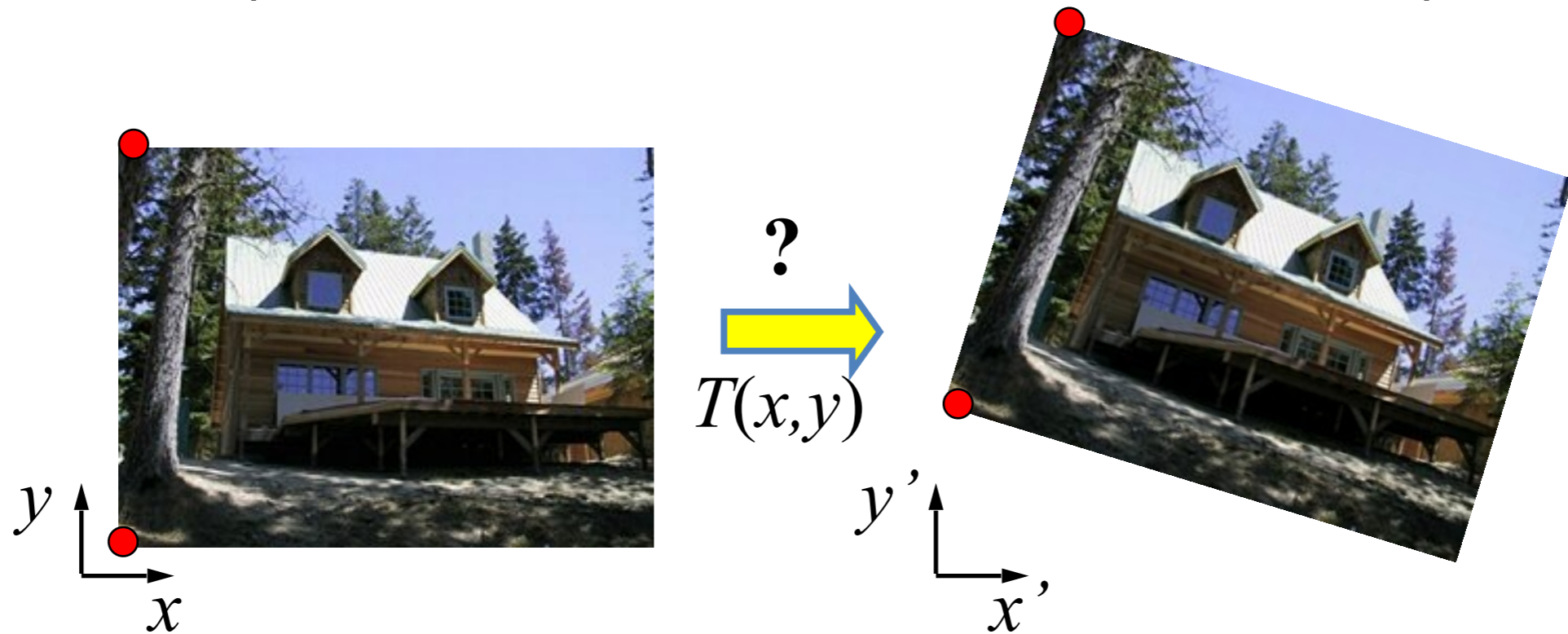
- Admettons que nous connaissons deux images (f et g). Comment faire pour estimer leur transformation?
- Demandons à un utilisateur de nous donner des correspondances
  - Combien en avons-nous besoin?

# Translation



- Combien de degrés de liberté (DDL)?
- Combien de correspondances?

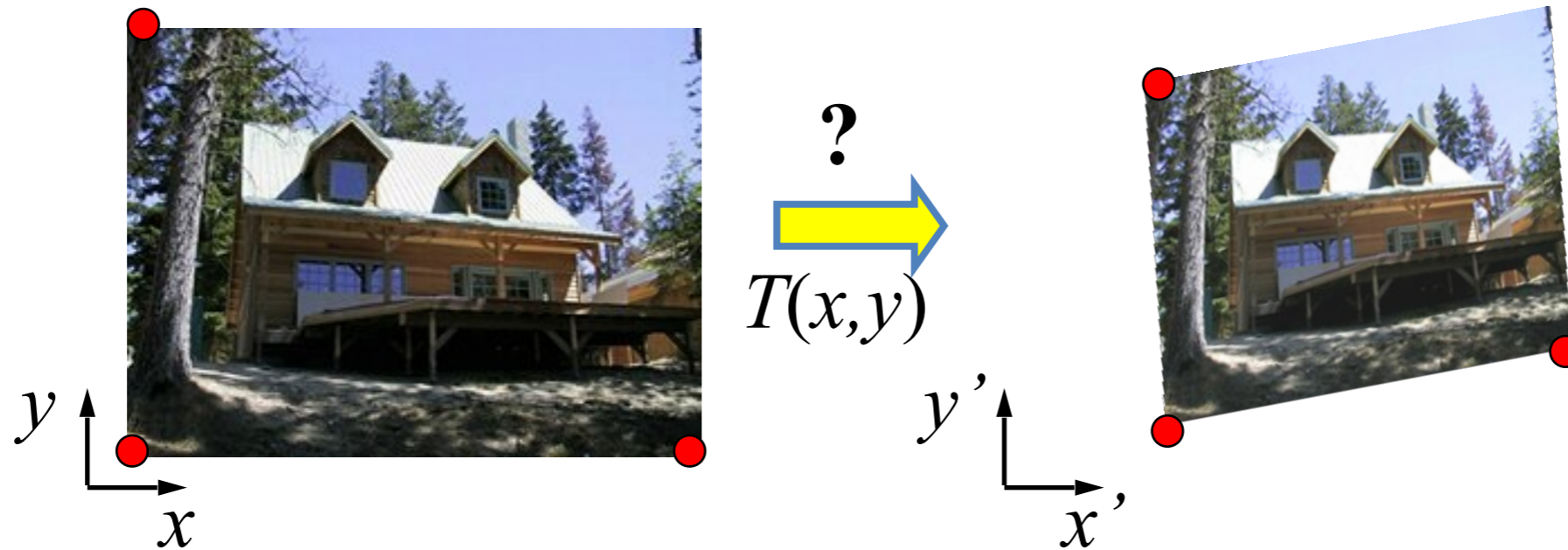
# Rigide (translation + rotation)



- Combien de degrés de liberté (DDL)?
- Combien de correspondances?

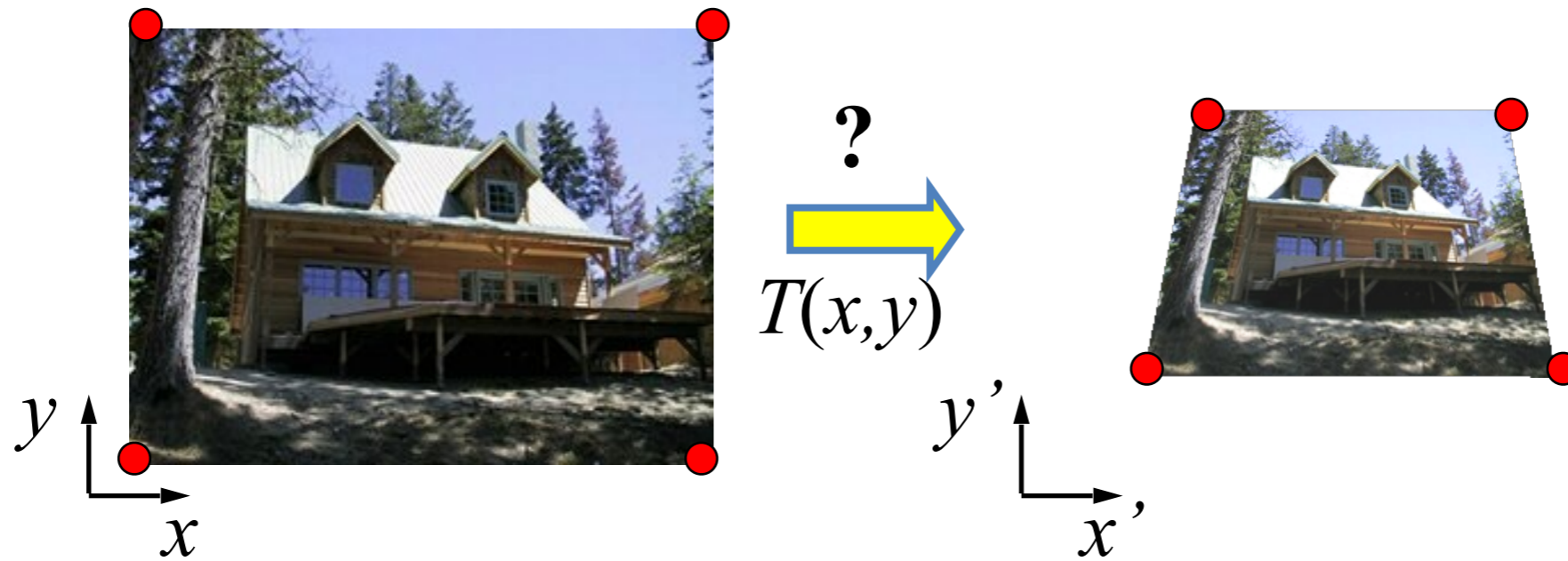


# Affine



- Combien de degrés de liberté (DDL)?
- Combien de correspondances?

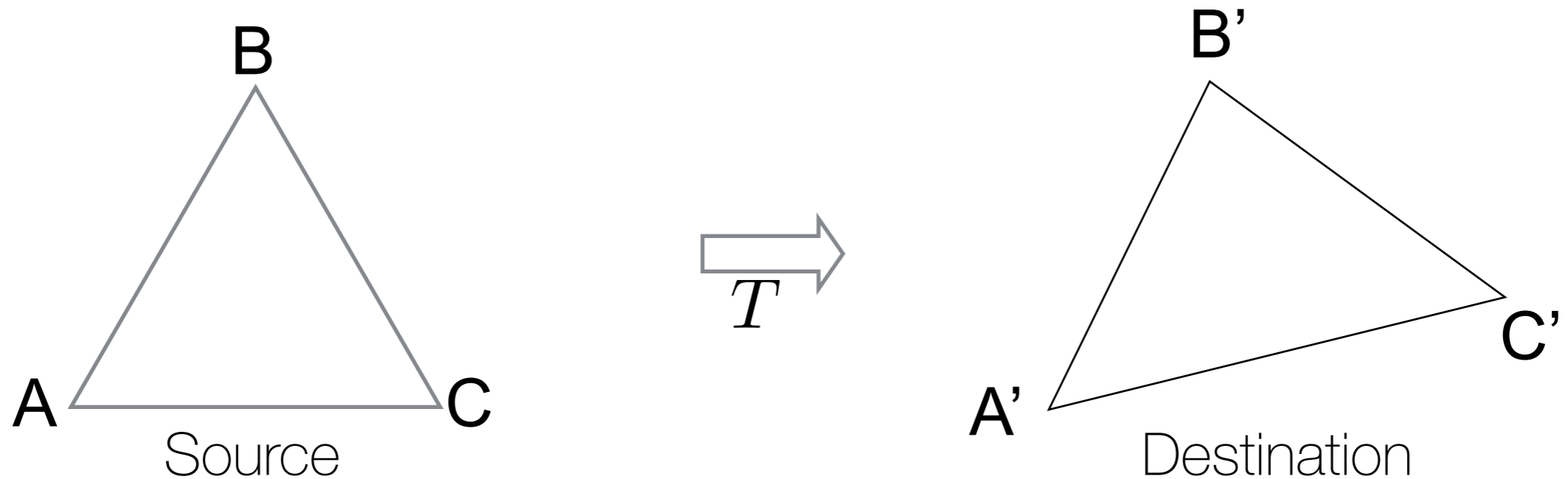
# Projective



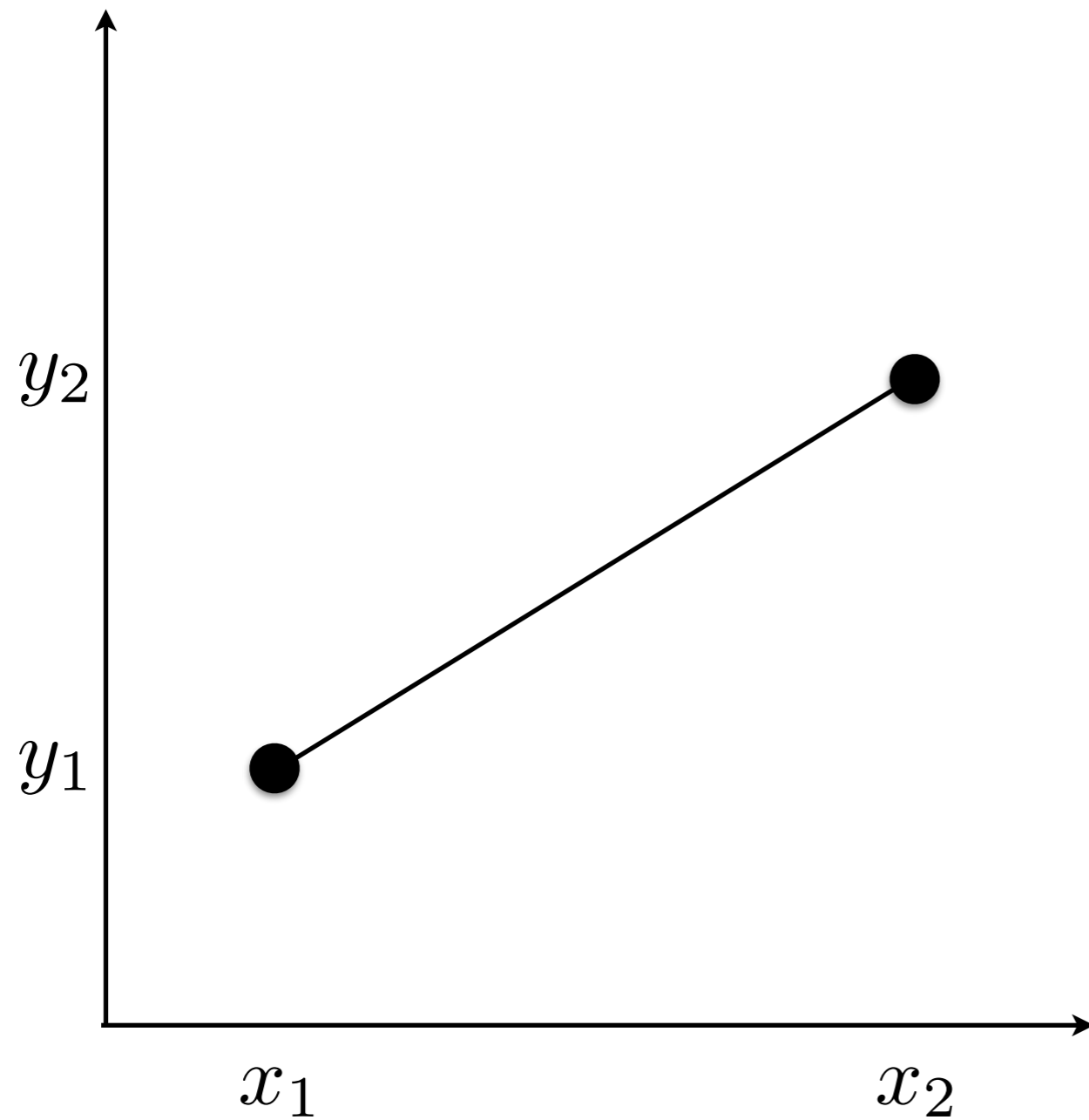
- Combien de degrés de liberté (DDL)?
- Combien de correspondances?

# Questions

- Supposons que nous avons deux triangles:
  - $ABC$  et  $A'B'C'$
- Quelle est la transformation qui passe de  $ABC$  vers  $A'B'C'$ ?
- Comment pouvons-nous estimer ses paramètres?



# Estimation de paramètres

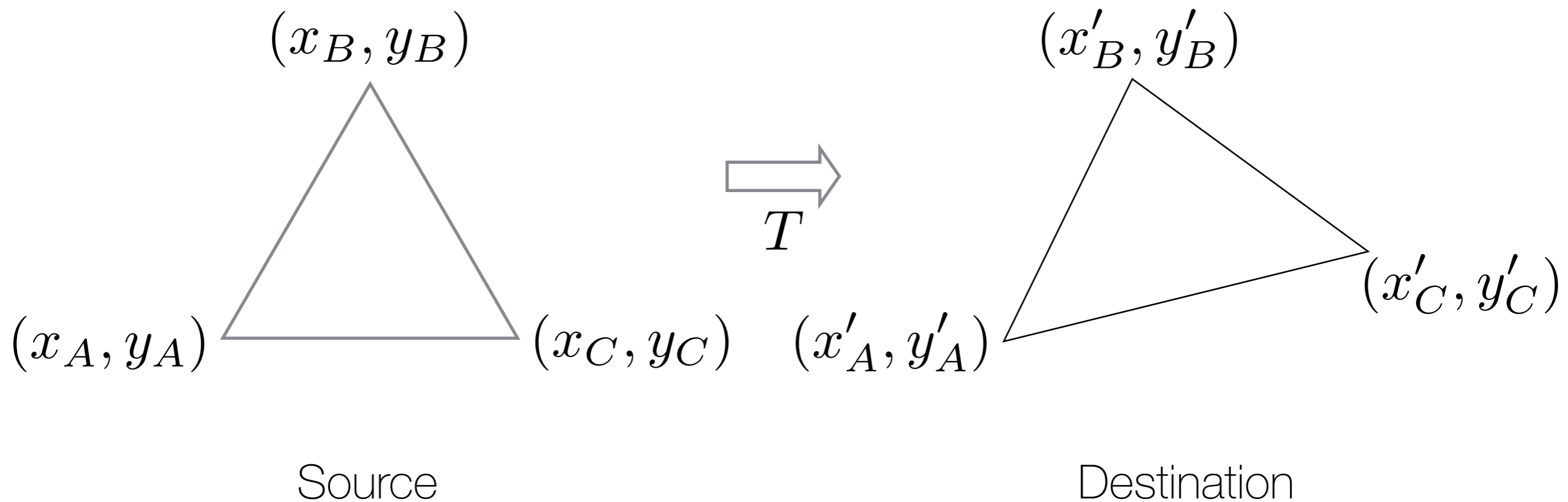


$$y = ax + b$$

# Démonstration

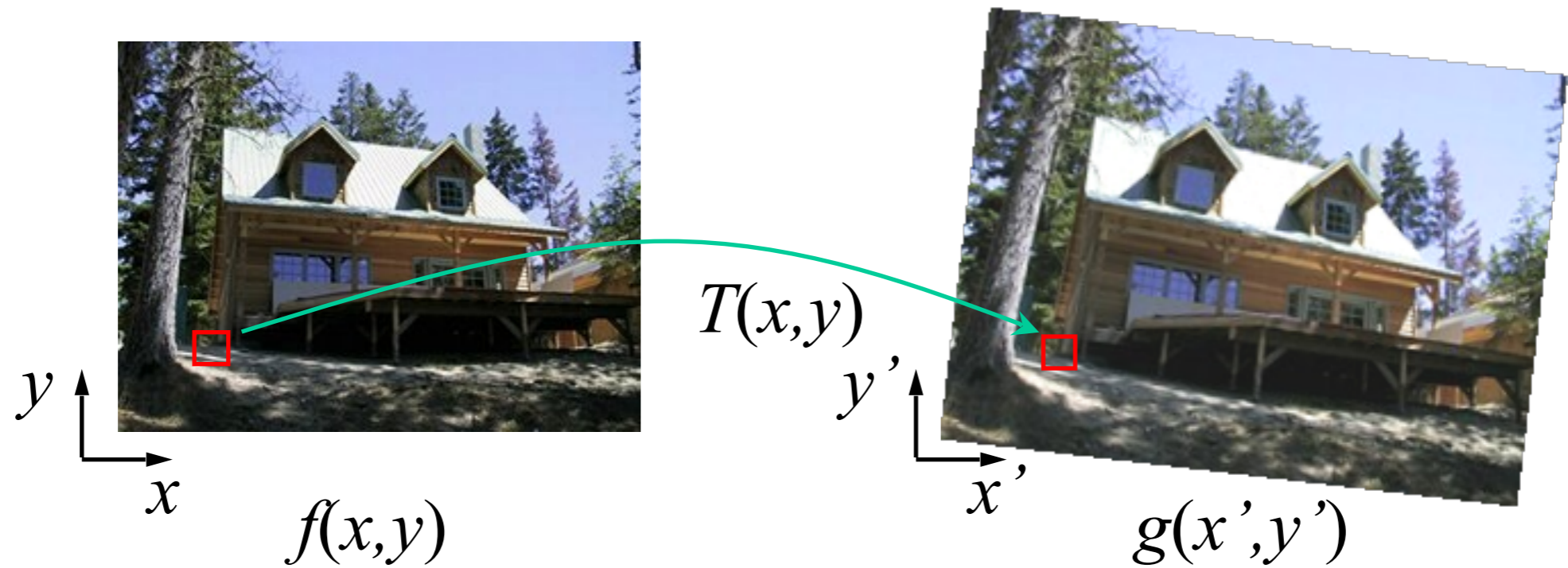
lls.m

# Estimation de paramètres



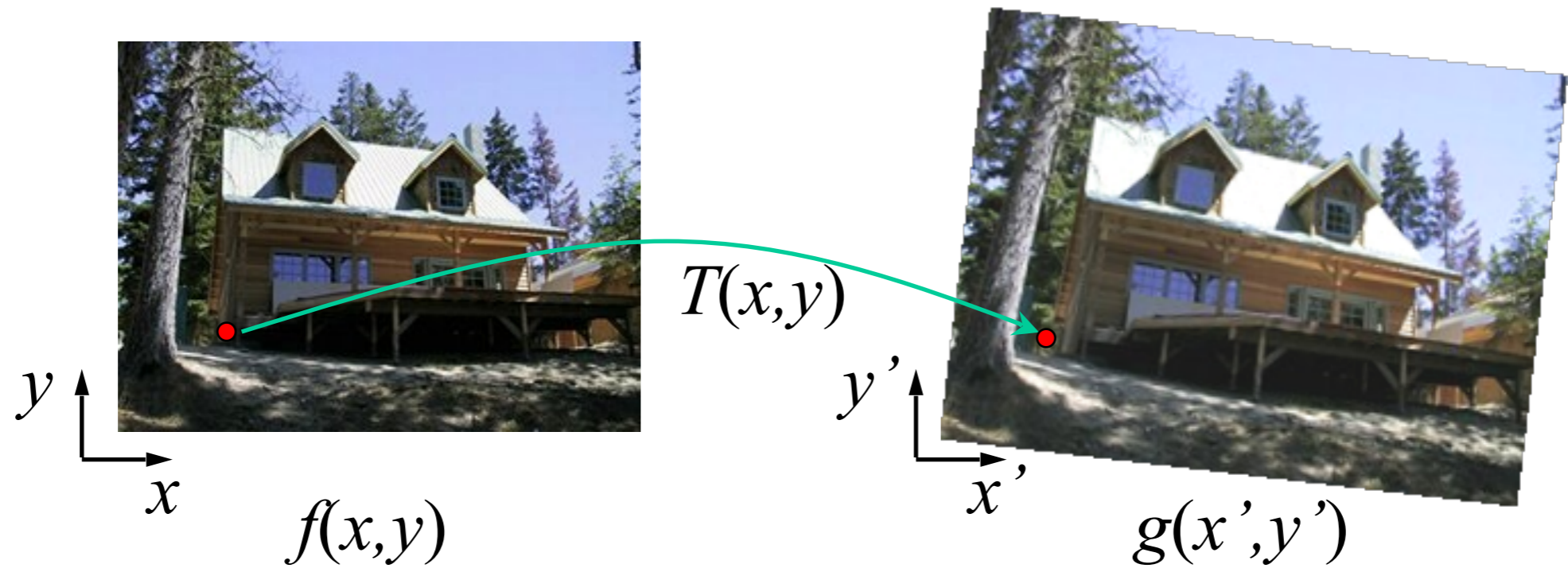
$$T = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

# Déformation d'image



- Étant données une image  $f$  et une transformation  $T$ , comment calculer l'image déformée  $g$ ?

# Idée 1 : transformée directe

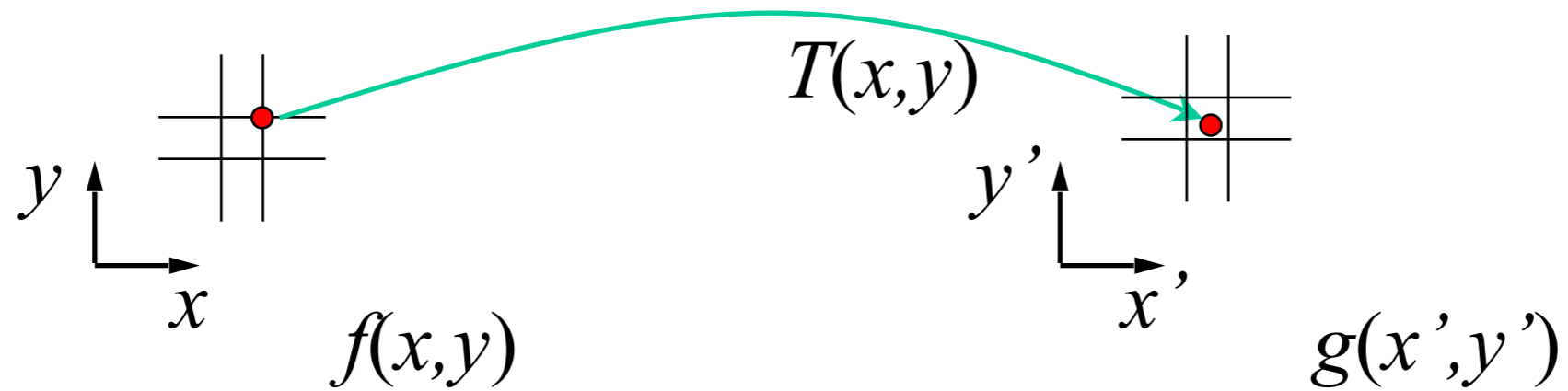


- Pour chaque pixel dans  $f$ 
  - Calculer sa nouvelle position, et “copier-coller” sa couleur



# Idée 1 : transformée directe

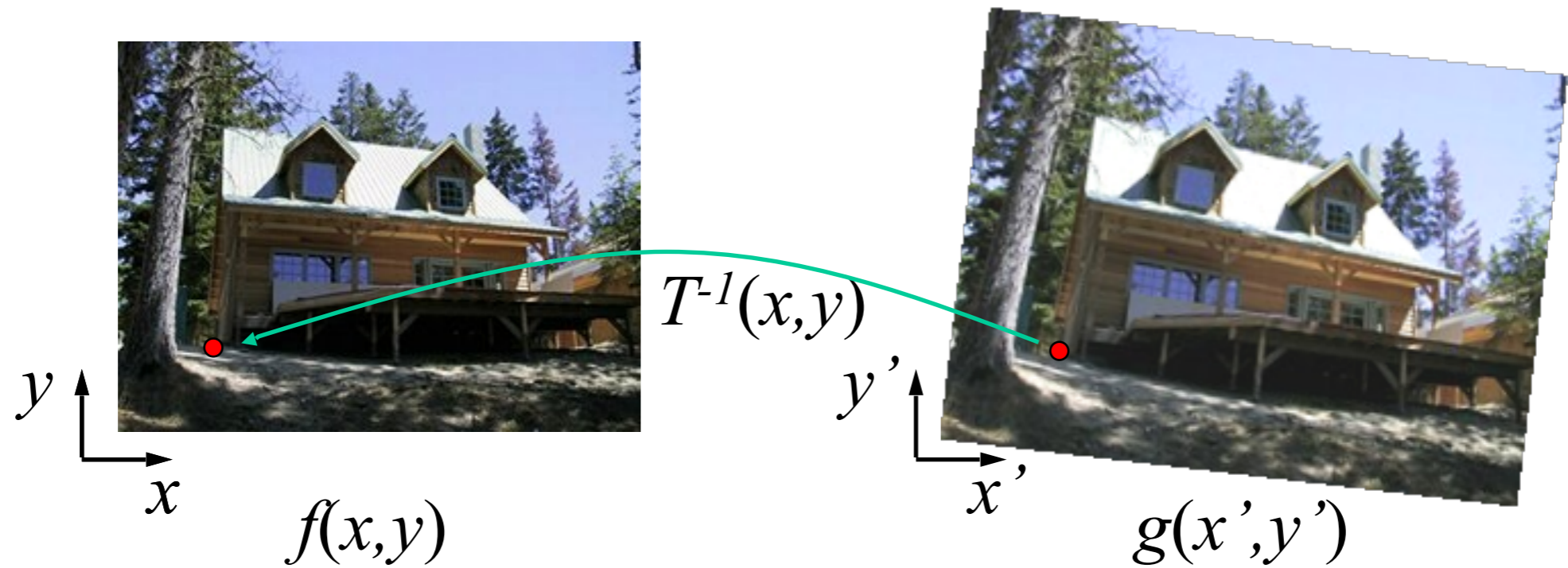
Quel est le problème avec cette approche?



Q: Qu'est-ce qu'on fait si un pixel arrive "entre" deux pixels?

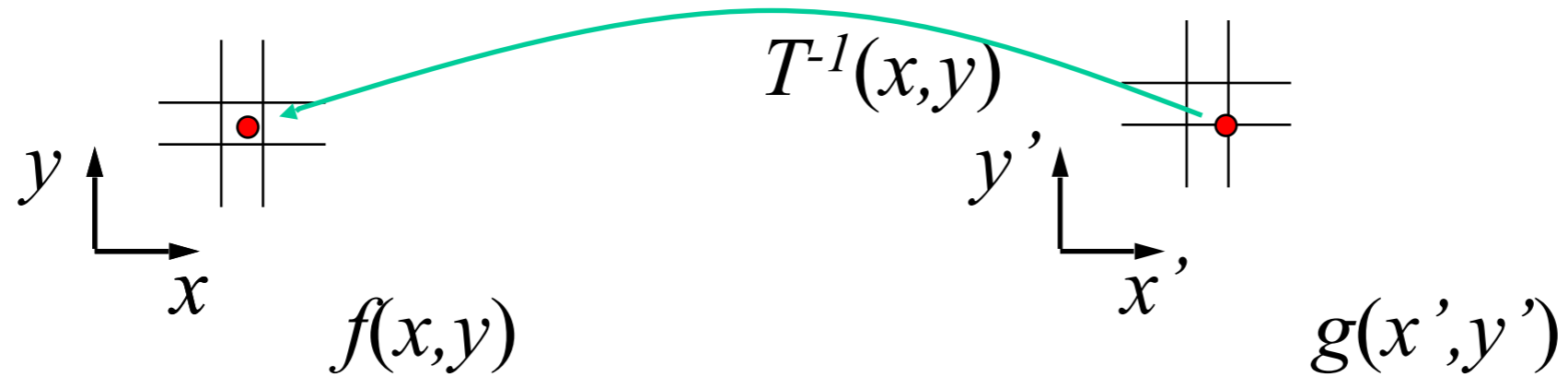
R: distribuer sa couleur sur les pixels avoisinants  
(comme si on "aplatissait" la couleur)

# Idée 2: transformée inverse



- Pour chaque pixel dans  $g$ 
  - Calculer d'où il vient grâce à l'inverse de  $T$

# Idée 2: transformée inverse

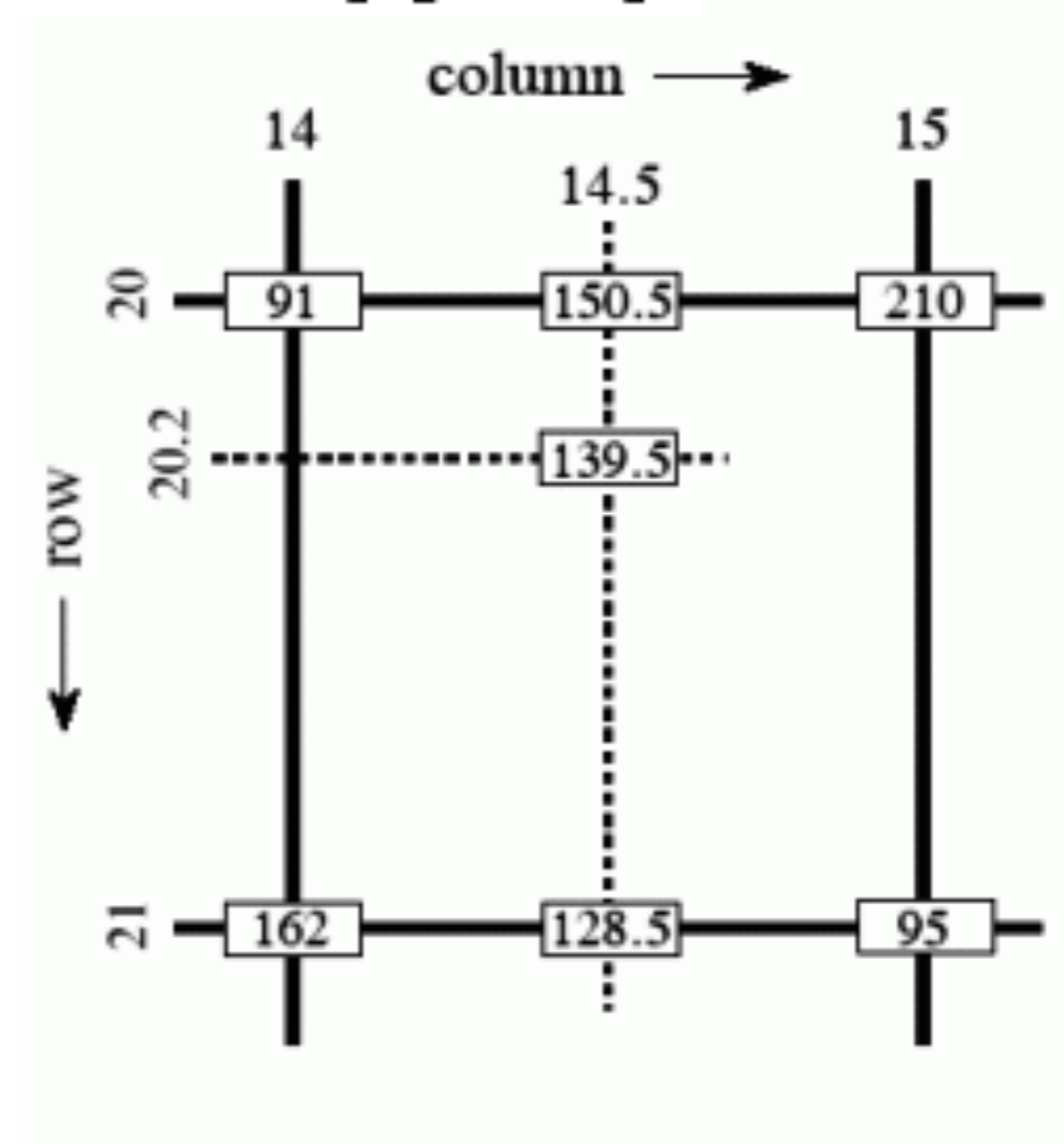
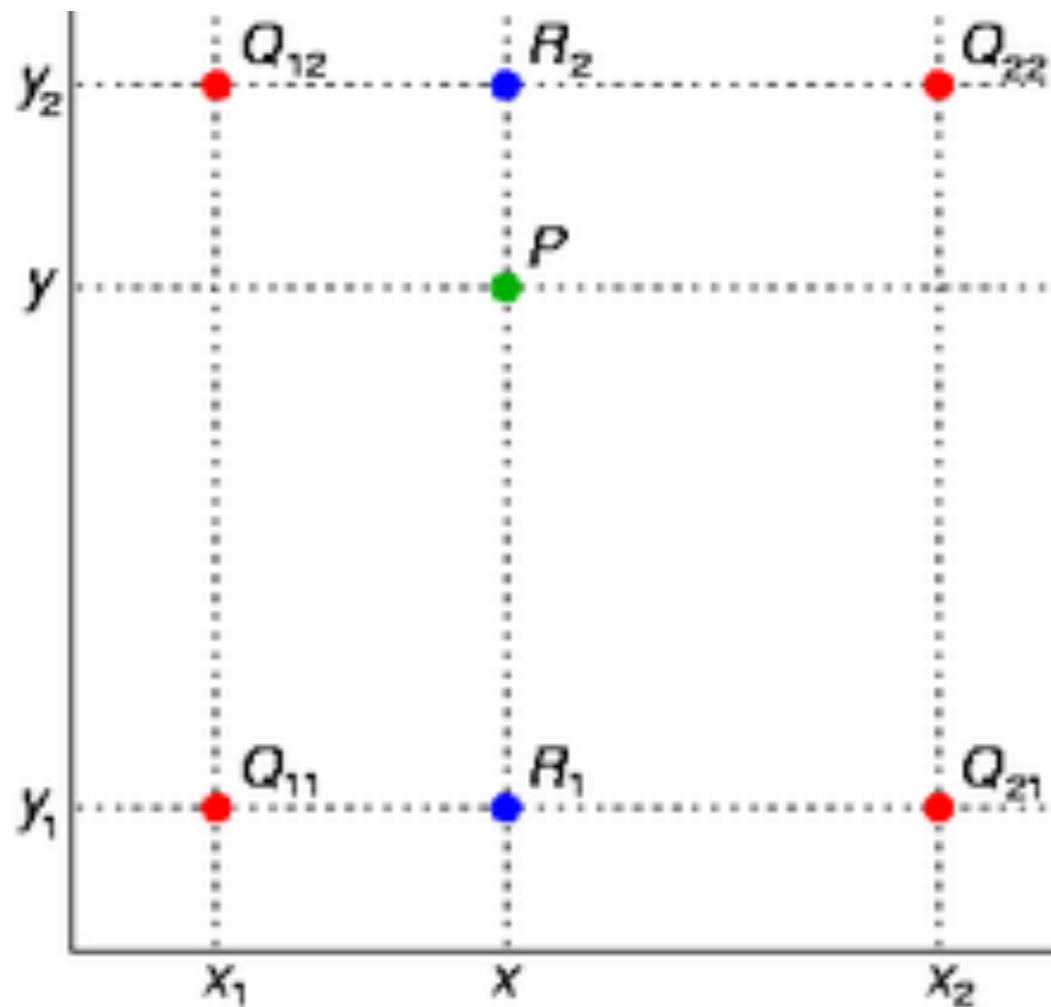


Q: qu'est-ce qu'on fait si un pixel provient "d'entre deux pixels"?

R: Interpolation!  
plus proche voisin, bi-linéaire, bi-cubique, etc.  
interp2 dans Matlab

# Interpolation bilinéaire

$$f(x, y) \approx \begin{bmatrix} 1 - x & x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f(0, 0) & f(0, 1) \\ f(1, 0) & f(1, 1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 - y \\ y \end{bmatrix}.$$



# Déformation directe vs inverse

- Laquelle est la meilleure?
- Habituellement, c'est la transformée inverse
  - Garantit qu'on ne génère pas de trou
  - Cependant, il faut que notre transformation puisse être inversée!